ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΟΛΙΚΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ (ΔΕΟ 42) - ΕΑΠ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΜΟΥ Γ & Ε

ΑΘΗΝΑ ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2012

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

Περιεχόμενα

1. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1: ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΜΟΥ Γ 3
2. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 2: ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΜΟΥ Ε & ΜΕ ΠΟΛΛΟΥΣ ΕΜΠΕΙΡΟΓΝΩΜΟΝΕΣ (2006-2007) 13
3. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 3: ΧΡΟΝΟΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ (ΤΕΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2006-2007) 16
4. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 4: ΑΝΑΛΥΣΗ ΝΕΚΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2004-2005)..17
5. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 5: ΚΑΜΠΥΛΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΑΣ (ΤΕΛΙΚΕΣ 2003-2004) 19
6. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 6: ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΧΟΡΗΓΗΣΗΣ (ΕΡΓΑΣΙΑ 2008-2009) 20
7. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 7: ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ (ΤΕΛΙΚΕΣ 2005-2006).....21
8. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 8: BOD (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2003-2004) 26
9. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 9: ΠΑΡΟΧΗ ΑΠΟΒΛΗΤΩΝ (2009-2010) 27

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 **Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ**
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr **Τηλ:210.93.24.450**

1. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1: ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΜΟΥ Γ

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας με κλίμακα βαθμολογίας aij από 1 έως 5 με άριστα το 5:

Κριτήρια fi	Συντελεστής Βαρύτητας wi	A1	A2	**A3**	A4	A1	A2	**A3**	A4
f1 (λειτ. Κόστος)	0,21	1,5	2,2	2,8	3,6				
f2 (σταθ. Κόστος)	0,27	**3,7**	3,2	2,5	**3,1**				
f3	0,2	3,5	2,9	2,6	2,2				
f4	0,22	3,9	2,7	2,4	2,3				
f5	0,06	4	3,4	3	3,7				
f6	0,04	3,7	3	2,7	3,8				
					Sj				

1. Να προσδιορίσετε τη βέλτιστη επιλογή. (Κλίμακα βαθμολογίας 1-5 με άριστα το 5.)
2. Να κάνετε ανάλυση ευαισθησίας της διαφοράς μεταξύ της πρώτης καλύτερης λύσης A_k ως προς την δεύτερη καλύτερη λύση για μεταβολή του βαθμού α_{2k} κατά $\pm$40%, να παρουσιάσετε το σχετικό διάγραμμα και να διατυπώστε το συμπέρασμα που προκύπτει.
3. Να προσδιορίσετε υπολογιστικά την αναγκαία ελάχιστη μεταβολή (%) του βαθμού α_{2k} της πρώτης καλύτερης επιλογής A_k, ώστε η δεύτερη καλύτερη επιλογή να γίνει εξίσου καλή με την πρώτη. Υπήρξε η δυνατότητα επηρεασμού της προτεινόμενης ως καλύτερης λύσης από τον εμπειρογνώμονα με μεροληπτική εκτίμηση <u>μόνο</u> του βαθμού α_{2k};
4. Να κάνετε ανάλυση ευαισθησίας της διαφοράς μεταξύ της πρώτης καλύτερης λύσης ως προς την δεύτερη καλύτερη λύση για ταυτόχρονη μεταβολή των βαθμών α_{2k} και α_{4k} κατά $\pm$40% και να διατυπώστε το συμπέρασμα που προκύπτει..
5. Να προσδιορίσετε υπολογιστικά την σχέση μεταξύ των βαθμών α_{2k} και α_{4k} της πρώτης καλύτερης επιλογής A_k, ώστε η δεύτερη καλύτερη επιλογή να γίνει εξίσου καλή με την πρώτη και να παραστήσετε γραφικά το α_{4k} ως συνάρτηση του α_{2k}.
6. Ποιο είναι το μικρότερο ποσοστό x (%), κατά το οποίο πρέπει να μειωθεί ο βαθμός της πρώτης κατά σειρά προτίμησης επιλογής και συγχρόνως να αυξηθεί (κατά το ίδιο ποσοστό x) ο βαθμός της δεύτερης κατά σειρά προτίμησης επιλογής ως προς το κριτήριο του σταθερού κόστους, ώστε να προκριθεί η δεύτερη (δηλ. να γίνει πρώτη); Να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα.
7. Να προσδιορίσετε το ελάχιστο ποσοστό μεταβολής των βαθμών της καλύτερης και της χειρότερης επιλογής (ενιαίο για όλους τους βαθμούς αυτούς), ώστε να καταστεί η χειρότερη πρώτη προτεινόμενη επιλογή.

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 **Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ**
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr **Τηλ:210.93.24.450**

8. Ας υποθέσουμε ότι το 6^{ο} κριτήριο εξαλείφεται. Να υπολογίσετε τα νέα βάρη των υπολοίπων κριτηρίων με την παραδοχή ότι κάθε ένα από αυτά μεταβάλλεται ανάλογα με την αρχική τιμή του, έτσι ώστε το συνολικό άθροισμα όλων των βαρών να είναι πάλι 100% (ή 1 αν χρησιμοποιούνται κλάσματα της μονάδας αντί ποσοστών %). Να κατατάξετε εκ νέου τις εναλλακτικές λύσεις, κατά σειρά φθίνουσας προτίμησης.
9. Ας υποθέσουμε ότι το βάρος του 2^{ου} κριτηρίου μειώνεται κατά 10%. Να υπολογίσετε τα νέα βάρη των υπολοίπων κριτηρίων με την παραδοχή ότι κάθε ένα από αυτά μεταβάλλεται ανάλογα με την αρχική τιμή του, έτσι ώστε το συνολικό άθροισμα όλων των βαρών να είναι πάλι 100% (ή 1 αν χρησιμοποιούνται κλάσματα της μονάδας αντί ποσοστών %). Να κατατάξετε εκ νέου τις εναλλακτικές λύσεις, κατά σειρά φθίνουσας προτίμησης.
10. Ας υποθέσουμε ότι προστίθεται ένα 7^{ο} κριτήριο με βάρος 16%. Να υπολογίσετε τα νέα βάρη των υπολοίπων κριτηρίων με την παραδοχή ότι κάθε ένα από αυτά μεταβάλλεται ανάλογα με την αρχική τιμή του, έτσι ώστε το συνολικό άθροισμα όλων των βαρών να είναι πάλι 100% (ή 1 αν χρησιμοποιούνται κλάσματα της μονάδας αντί ποσοστών %).

11. Έστω ότι ο βαθμός α21 μεταβάλλεται κατά δα21= -0,3x-0,1 και ο βαθμός α24 κατά δα24=0,5x+0,6. Να προσδιορίσετε το x ώστε οι A1 και A4 να γίνουν εξίσου καλές λύσεις.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Αφού άριστα είναι το 5 (άνω όριο της κλίμακας) βρίσκουμε πρώτα τα σταθμισμένα γινόμενα κάθε επιλογής και τα αθροίζουμε κατακόρυφα. Επιλέγουμε το μέγιστο άθροισμα ως καλύτερη επιλογή και κατατάσσουμε τις επιλογές με **φθίνουσα** σειρά (από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο άθροισμα).

Συντ. Βαρ.	A1	A2	**A3**	A4	A1	A2	**A3**	A4
0,21	1,5	2,2	2,8	3,6	0,315	0,462	0,588	0,756
0,27	**3,7**	3,2	2,5	**3,1**	0,999	0,864	0,675	0,837
0,2	3,5	2,9	2,6	2,2	0,7	0,58	0,52	0,44
0,22	3,9	2,7	2,4	2,3	0,858	0,594	0,528	0,506
0,06	4	3,4	3	3,7	0,24	0,204	0,18	0,222
0,04	3,7	3	2,7	3,8	0,148	0,12	0,108	0,152
					3,26	**2,824**	**2,599**	**2,913**

Επειδή S1 (3,26)>S4 (2,913)>S2 (2,824)>S3 (2,599) συμπεραίνουμε ότι A1>A4>A2>A3 όπου «>» σημαίνει «καλύτερη από».
Η βέλτιστη επιλογή είναι λοιπόν η A1 με Sh1=S1=3,26.

2. Βρήκαμε ότι η καλύτερη επιλογή είναι η A1, δηλ. Ακ = A1 και όπου βλέπουμε κ θα αντικαθιστούμε πλέον με 1.
Ο βαθμός α2k είναι επομένως ο α21=3,7. Μας ζητείται ουσιαστικά να μεταβάλλουμε τον βαθμό α21, οπότε θα μεταβάλλεται το αντίστοιχο σταθμισμένο γινόμενο και τελικά θα μεταβάλλεται το άθροισμα S1. Αυτό το νέο άθροισμα θα το συγκρίνουμε με το S4 (το οποίο μένει πάντα ίδιο) παίρνοντας τη διαφορά τους.

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 **Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ**
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr **Τηλ:210.93.24.450**

- Αν S1 (καινούργιο) - S4 > 0 εξακολουθεί η A1 να είναι καλύτερη επιλογή.
- Αν S1 (καινούργιο) - S4 < 0 η A4 έχει γίνει καλύτερη επιλογή.

Εδώ φαίνεται λοιπόν αν μπορούμε να μεροληπτήσουμε.

Επίσης, μπορούμε να έχουμε παραλλαγή της άσκησης. Δηλαδή, να μεταβάλλεται κάποιος βαθμός της A4 (δεύτερης καλύτερης επιλογής) ή η ανάλυση ευαισθησίας να γίνει ανάμεσα στην πρώτη και σε κάποια άλλη επιλογή (όχι απαραίτητα στη δεύτερη).

Οι μεταβολές του α21 είναι οι ακόλουθες:

(α) 3,7 + 40%*3,7 = 3,7 + 0,40 * 3,7 = (1+ 0,40) * 3,7 = 1,4 * 3,7 = **5,18**
(β) 3,7 - 40%*3,7 = 3,7 - 0,40 * 3,7 = (1 - 0,40) * 3,7 = 0,6 * 3,7 = **2,22**

Εξετάζουμε σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις τη διαφορά της πρώτης καλύτερης ως προς τη δεύτερη καλύτερη λύση:

Συντ. Βαρ.	A1	A2	**A3**	A4	A1	A2	**A3**	A4
0,21	1,5	2,2	2,8	3,6	0,315	0,462	0,588	0,756
0,27	**5,18**	3,2	2,5	3,1	**1,3986**	0,864	0,675	0,837
0,2	3,5	2,9	2,6	2,2	0,7	0,58	0,52	0,44
0,22	3,9	2,7	2,4	2,3	0,858	0,594	0,528	0,506
0,06	4	3,4	3	3,7	0,24	0,204	0,18	0,222
0,04	3,7	3	2,7	3,8	0,148	0,12	0,108	0,152
					3,6596	**2,824**	**2,599**	**2,913**

(α) Sh1-Sh2 = S1-S4 = 3,26 – 0,27*3,7 + 0,27*__5,18__ – 2,913 = 0,7466 >0 ή

=3,6596 – 2,913 = 0,7466 >0

Συντ. Βαρ.	A1	A2	**A3**	A4	A1	A2	**A3**	A4
0,21	1,5	2,2	2,8	3,6	0,315	0,462	0,588	0,756
0,27	**2,22**	3,2	2,5	3,1	**0,5994**	0,864	0,675	0,837
0,2	3,5	2,9	2,6	2,2	0,7	0,58	0,52	0,44
0,22	3,9	2,7	2,4	2,3	0,858	0,594	0,528	0,506
0,06	4	3,4	3	3,7	0,24	0,204	0,18	0,222
0,04	3,7	3	2,7	3,8	0,148	0,12	0,108	0,152
					2,8604	**2,824**	**2,599**	**2,913**

(β) Sh1-Sh2 = S1-S4 = 3,26 – 0,27*3,7 + 0,27*__2,22__ – 2,913 = -0,0526 <0 ή

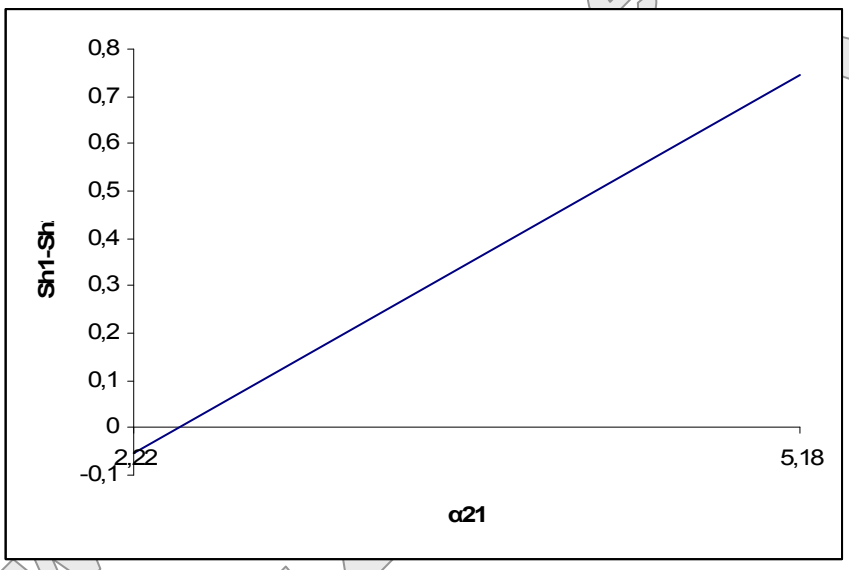
ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 **Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ**
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr **Τηλ:210.93.24.450**

= 2,8604 – 2,913 = = -0,0526 <0

Παρατηρούμε ότι για α21=2,22 (μείωση του 3,7 κατά 40% = 2,2) Sh1-Sh2<0 ή Sh1<Sh2, δηλ. η δεύτερη καλύτερη έχει πλέον το μεγαλύτερο άθροισμα, άρα έχει γίνει η πρώτη καλύτερη, οπότε αφού το 2,2 είναι μέσα στην κλίμακα βαθμολόγησης (1-5) μπορούμε να μεροληπτήσουμε.

Άρα βρήκαμε:

α21	Sh1-Sh2
5,18	0,7466
2,22	-0,0526



Όπως φαίνεται από το παραπάνω διάγραμμα, η πρώτη καλύτερη λύση είναι ευαίσθητη στη μεταβολή του βαθμού α21 στο διάστημα -40%, αφού η διαφορά των αθροισμάτων γίνεται αρνητική (για κάποια τιμή κοντά στο 2,22).

3. Ζητάμε την αναγκαία ελάχιστη μεταβολή % του α21=3,7 ώστε η 2η καλύτερη επιλογή να γίνει εξίσου καλή με την 1η. Έστω ότι ο α21 πρέπει να μεταβληθεί και να γίνει α'21 προκειμένου τα αθροίσματα της 1ης και της 2ης καλύτερης να εξισωθούν. Τότε:

Συντ. Βαρ.	A1	A2	**A3**	A4	A1	A2	**A3**	A4
0,21	1,5	2,2	2,8	3,6	0,315	0,462	0,588	0,756
0,27	**α21'**	3,2	2,5	3,1	**0,27*α21'**	0,864	0,675	0,837
0,2	3,5	2,9	2,6	2,2	0,7	0,58	0,52	0,44
0,22	3,9	2,7	2,4	2,3	0,858	0,594	0,528	0,506
0,06	4	3,4	3	3,7	0,24	0,204	0,18	0,222

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

0,04	3,7	3	2,7	3,8	0,148	0,12	0,108	0,152
					S1'	**2,824**	**2,599**	**2,913**

Sh1=Sh2 <=> S1' = S4 <=>

3,26 – 0,27*3,7 + 0,27*α'21 = 2,913 <=>

0,27*α'21 = 0,652 <=>

α'21 = 2,415

ή

Sh1=Sh2 <=> S1' = S4 <=>

2,261 + 0,27*α'21 = = 2,913 <=>

0,27*α'21 = 0,652 <=>

α'21 = 2,415

Επομένως αναγκαία ελάχιστη μεταβολή -> (νέος βαθμός – παλιός βαθμός) / παλιός βαθμός

$$\frac{2,415-3,7}{3,7}=-0,34729$$ ή μείωση κατά 34,73%.

Είχε λοιπόν ο εμπειρογνώμονας τη δυνατότητα να επηρεάσει ποια λύση θα προταθεί ως καλύτερη, μεροληπτώντας μόνο επί του βαθμού α21;

Ναι: Όπως βρήκαμε, θα μπορούσε να έχει δώσει στον α21 βαθμό 2,415 (αντί του 3,7) και να κάνει έτσι την 2η εξίσου καλή με την 1η επιλογή. Αν έδινε βαθμό μεταξύ του 1 (κατώτερη δυνατή βαθμολογία) και του 2,415, θα είχε προταθεί η 2η αντί της 1ης ως καλύτερη.

Εναλλακτική λύση:

Αφού μεταβάλλεται η πρώτη επιλογή, για να γίνει η δεύτερη καλύτερη, πρέπει το άθροισμα της πρώτης να **κατέβει / μειωθεί** άρα μπορούμε να γράψουμε το νέο βαθμό:

α΄21 = 3,7-3,7x

Συντ. Βαρ.	A1	A2	**A3**	A4	A1	A2	**A3**	A4
0,21	1,5	2,2	2,8	3,6	0,315	0,462	0,588	0,756
0,27	**3,7-3,7x**	3,2	2,5	3,1	**0,999-0,999x**	0,864	0,675	0,837
0,2	3,5	2,9	2,6	2,2	0,7	0,58	0,52	0,44
0,22	3,9	2,7	2,4	2,3	0,858	0,594	0,528	0,506
0,06	4	3,4	3	3,7	0,24	0,204	0,18	0,222
0,04	3,7	3	2,7	3,8	0,148	0,12	0,108	0,152
					S1'	**2,824**	**2,599**	**2,913**

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 **Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ**
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr **Τηλ:210.93.24.450**

3,26 – 0,999x = 2,913 <=> 0,999*x = 0,347 <=> x = 0,3473 ή 34,73%

Για να απαντήσουμε σε αυτήν την περίπτωση αν ο εμπειρογνώμονας είχε δυνατότητα επηρεασμού βρίσκουμε την τιμή του 3,7 όταν μειωθεί κατά 34,73% (καταλήγουμε δηλ. πάλι στο 2,415) και απλά ελέγχουμε αν πρόκειται για έγκυρη βαθμολογία (δηλ ανάμεσα στο 1 και στο 5). Αν είναι έγκυρη, σημαίνει ότι ο εμπειρογνώμονας θα μπορούσε να την έχει δώσει αντί της 3,7 και να έχει επηρεάσει το αποτέλεσμα.

Μπορεί να υπάρξουν διάφορες παραλλαγές στην άσκηση.
1η: Να μεταβληθεί ένας βαθμός της δεύτερης καλύτερης επιλογής οπότε η μεταβολή προστίθεται
2η: Να μεταβληθούν πάνω από ένας βαθμοί (στην περίπτωση της άσκησης ή στην 1η περίπτωση)
3η: Να μεταβληθούν ταυτόχρονα όλοι οι βαθμοί της πρώτης και της δεύτερης επιλογής τότε:

3,26-3,26x = 2,913+2,913x <=>
0,347 = 6,173x <=>
x= 0,0562 ή 5,62%

4. Όταν έχουμε «ταυτόχρονη μεταβολή» δύο βαθμών κατά π.χ. +40%, πρόκειται για διπαραμετρική ανάλυση ευαισθησίας. Πρέπει να πάρουμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς, δηλ. μείωση του ενός και συγχρόνως αύξηση του άλλου κατά 40%, μείωση και των δύο κατά 40% κ.ο.κ. και να εξετάζουμε κάθε φορά την διαφορά Sh1-Sh2. Για να εξασφαλίσουμε ότι θα πάρουμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς μεταβολών, συγκεντρώνουμε τα αποτελέσματα σε έναν πίνακα, όπως τον παρακάτω:

α2k=α21=3,7 -> [-40%] 3,7*0,60=**2,22**
-> [+40%] 3,7*1,40=**5,18**
α4k=α41=3,9 -> [-40%] 3,9*0,60=**2,34**
-> [-40%] 3,9*1,40=**5,46**

	2,22	**3,7**	5,18
2,34	Sh1-Sh2 = (3,26-0,22*3,9+0,22*2,34-0,27*3,7+0,27*2,22)-2,913 = 2,517-2,913 =	Sh1-Sh2 = (3,26-0,22*3,9+0,22*2,34) -2,913 = 2,917-2,913 = = 0,04 > 0	Sh1-Sh2 = (3,26-0,22*3,9+0,22*2,34-0,27*3,7+0,27*5,18)-2,913 = 3,316-2,913 =

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 **Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ**
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr **Τηλ:210.93.24.450**

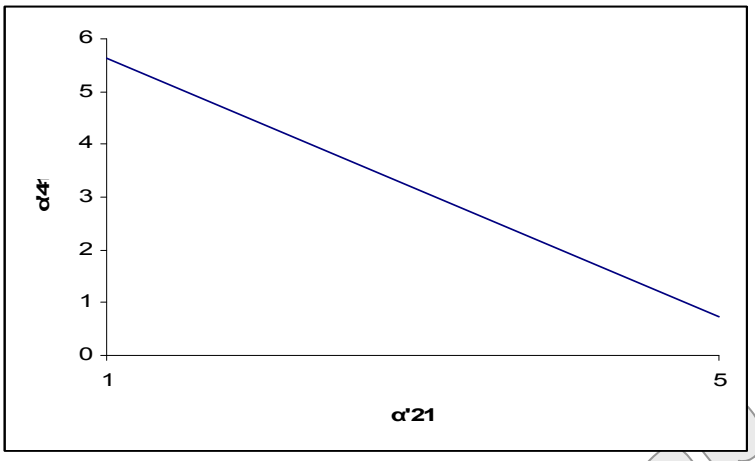
	= -0,4 < 0		= 0,403 > 0
3,9	Sh1-Sh2 = (3,26-0,27*3,7+0,27*2,22) -2,913 = 2,86-2,913 = = -0,05 < 0	Sh1-Sh2 = 3,26-2,913 = 0,347 > 0	Sh1-Sh2 = (3,26-0,27*3,7+0,27*5,18) -2,913 = 3,66-2,913 = = 0,747 > 0
5,46	Sh1-Sh2 = (3,26-0,22*3,9+0,22*5,46-0,27*3,7+0,27*2,22)-2,913 = 3,204-2,913 = = 0,291 > 0	Sh1-Sh2 = (3,26-0,22*3,9+0,22*5,46) -2,913 = 3,603-2,913 = = 0,69 > 0	Sh1-Sh2 = (3,26-0,22*3,9+0,22*5,46-0,27*3,7+0,27*5,18)-2,913 = 4,003-2,913 = = 1,09 > 0

Παρατηρούμε ότι η διαφορά Sh1-Sh2 γίνεται αρνητική (άρα και η 1η καλύτερη λύση ευαίσθητη) για ταυτόχρονη μείωση των δύο βαθμών κατά 40%, αλλά και για μείωση μόνο του 3,7 κατά 40% όταν ο 3,9 παραμένει σταθερός.

5. Χρειαζόμαστε δύο νέους βαθμούς α'21 και α'41 στη θέση των παλιών α21=3,7 και α41=3,9 «ώστε η 2η καλύτερη επιλογή να γίνει εξίσου καλή με την 1η» δηλ. Sh1=Sh2.
Άρα έχουμε:
Sh1-0,27*3,7+0,27*α'21-0,22*3,9+0,22*α'41 = Sh2 <=>
3,26 – 0,999 – 0,858 + 0,27*α'21 + 0,22*α'41 = 2,913 <=>
0,27*α'21 + 0,22*α'41 = 1,51 <=>
0,22*α'41 = 1,51 – 0,27*α'21 <=>
α'41 = 6,8636 – 1,2272*α'21 = f(α'21)
Η παραπάνω σχέση είναι της μορφής y = αx + β (άρα μια ευθεία) και για να οριστεί χρειαζόμαστε δύο σημεία της.

α'21	α'41
1	(6,8636-1,2272*1=)5,6364
5	(6,8636-1,2272*5=)0,7276

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450



6.

Ποιός είναι ο βαθμός της 1ης καλύτερης ως προς το σταθερό κόστος; α21=3,7
Ποιός είναι ο βαθμός της 2ης καλύτερης ως προς το σταθερό κόστος; α24=3,1
Ο πρώτος θα μειωθεί κατά x% και ο δεύτερος θα αυξηθεί κατά x%.
Άρα το άθροισμα της 1ης καλύτερης θα μειωθεί και της 2ης θα αυξηθεί:
3,26 – 0,27*3,7*x = 2,913 + 0,27*3,1*x <=>
1,836*x = 0,347 <=>
x = 0,189 ή 18,9%

Επαλήθευση:
3,7 - 0,189*3,7 = 0,811*3,7 = 3
3,1 + 0,189*3,1 = 1,189*3,1 = 3,6859

	Συντ. Βαρ.	A1	A2	**A3**	A4	A1	A2	A3	A4
1	0,21	1,5	2,2	2,8	3,6	0,315	0,462	0,588	0,756
2	0,27	**3**	3,2	2,5	**3,6859**	0,81	0,864	0,675	0,995
3	0,2	3,5	2,9	2,6	2,2	0,7	0,58	0,52	0,44
4	0,22	3,9	2,7	2,4	2,3	0,858	0,594	0,528	0,506
5	0,06	4	3,4	3	3,7	0,24	0,204	0,18	0,222
6	0,04	3,7	3	2,7	3,8	0,148	0,12	0,108	0,152
						3,071	2,824	2,599	**3,071**

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 **Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ**
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr **Τηλ:210.93.24.450**

7. Για να γίνει η χειρότερη 1η προτεινόμενη, πρέπει όλοι οι βαθμοί της καλύτερης (δηλ. της Α1) <u>να μειωθούν</u> έστω κατά x% και της χειρότερης (δηλ. της Α3) <u>να αυξηθούν</u> κατά x% ώστε τα αθροίσματά τους να εξισωθούν.

   Αν όλοι οι βαθμοί της καλύτερης μειωθούν κατά x% τότε και το άθροισμά της θα μειωθεί κατά x%, άρα θα γίνει S1-> S1*(1-x)

   Επίσης, αν όλοι οι βαθμοί της χειρότερης αυξηθούν κατά x% τότε και το άθροισμά της θα αυξηθεί κατά x%, άρα θα γίνει S3-> S3*(1+x)

   Άρα έχουμε:

   S1*(1-x) = S3*(1+x) <=>

   S1 – x*S1 = S3 + x*S3 <=>

   S1 – S3 = x*(S3+S1) <=>

   3,26 – 2,599 = (3,26 + 2,599) * x <=>

   0,661 = 5,859 *x <=>

   x = 0,1128 ή 11,28%

8. Πριν εξαλειφθεί το 6ο κριτήριο με βάρος 0,04, τα άλλα κριτήρια συμμετείχαν στο υπόλοιπο (1-0,04 =) 0,96. Αφού εξαλειφθεί το 6ο κριτήριο, τα άλλα θα μοιράζονται πλέον το 1.

   Επομένως:

   το w1=0,21 συμμετείχε στο 0,96

   <u>w'1 1</u>

   w'1 = 0,21/0,96 = 0,21875 (>0,21, δηλ. όπως ήταν αναμενόμενο πήρε μια μικρή αύξηση)

   Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τα νέα βάρη των υπολοίπων κριτηρίων:

   w'2 = 0,27/0,96 = 0,28125

   w'3 = 0,2/0,96 = 0,2083

   w'4 = 0,22/0,96 = 0,2292

   w'5 = 0,06/0,96 = 0,0625

   Επαλήθευση:

   w'1 + w'2 + w'3 + w'4 + w'5 =

   0,21875 + 0,28125 + 0,2083 + 0,2292 + 0,0625 = 1

9. Το βάρος του 2ου κριτηρίου ήταν w2=0,27 και άφηνε χώρο στα υπόλοιπα κριτήρια (1-0,27 =) 0,73. Αφού μειώθηκε κατά 10% και έγινε w'2=0,27-0,10*0,27= 0,90*0,27=0,243 αφήνει πλέον χώρο στα υπόλοιπα (1-0,243 =) 0,757.

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 **Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ**
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr **Τηλ:210.93.24.450**

Επομένως:

το w1=0,21 πριν τη μεταβολή του w2 συμμετείχε στο 0,73

w'1 0,757

w'1 = 0,21*0,757/0,73 = 0,21*1,037 = 0,2177 (αναμενόμενη μικρή αύξηση)

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τα νέα βάρη των υπολοίπων κριτηρίων:

w'3 = 0,2*1,037 = 0,2083

w'4 = 0,22*1,037 = 0,22814

w'5 = 0,06*1,037 = 0,06222

w'6 = 0,04*1,037 = 0,04148

Επαλήθευση:

w'1 + w'2 + w'3 + w'4 + w'5 + w'6 =

0,2177 + 0,243 + 0,2083 + 0,22814 + 0,06222 + 0,04148 = 1

10. Ας υποθέσουμε ότι προστίθεται ένα 7^{ο} κριτήριο με βάρος 16%.

Πριν προστεθεί το 7^{ο} κριτήριο με βάρος 0,16, τα άλλα κριτήρια συμμετείχαν σε ολόκληρη τη μονάδα. Αφού προστεθεί το 7^{ο} κριτήριο, τα άλλα θα μοιράζονται πλέον το χώρο που τους αφήνει (= 1-0,16=) 0,84. Επομένως:

το w1=0,21 συμμετείχε στο 1

w'1 0,84

w'1 = 0,21*0,84 = 0,1764 (<0,21, δηλ. όπως ήταν αναμενόμενο μειώθηκε)

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τα νέα βάρη των υπολοίπων κριτηρίων:

w'2 = 0,27*0,84 = 0,2268

w'3 = 0,2*0,84 = 0,168

w'4 = 0,22*0,84 = 0,1848

w'5 = 0,06*0,84 = 0,0504

w'6 = 0,04*0,84 = 0,0336

Επαλήθευση:

w'1 + w'2 + w'3 + w'4 + w'5 + w'6 + w7 =

0,1764 + 0,2268 + 0,168 + 0,1848 + 0,0504 + 0,0336 + 0,16 = 1

11. Τις μεταβολές $δα_{ij}$ τις ΠΡΟΣΘΕΤΟΥΜΕ ΠΑΝΤΑ στα αντίστοιχα αθροίσματα ή βαθμολογίες (αναλόγως τι μας ζητάει η άσκηση). Τότε, αν πρόκειται για μείωση, θα προκύψει από το πρόσημο της μεταβολής.
Αν ο βαθμός $α_{21}$=3,7 μεταβληθεί κατά $δα_{21}$= -0,3x-0,1 τότε και το αντίστοιχο άθροισμα S1=3,26 θα μεταβληθεί κατά αυτή την μεταβολή (πολλαπλασιασμένη επί του συντελεστή βαρύτητας του αντίστοιχου βαθμού). Ομοίως και για τον βαθμό $α_{24}$ που μεταβάλλεται κατά

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

$\delta\alpha_{24}$=0,5x+0,6.
Θέλουμε οι A_1 και A_4 να γίνουν εξίσου καλές λύσεις, επομένως θέλουμε:
S1=S4 ⇔
3,26 + 0,27 * (-0,3x-0,1) = 2,913 + 0,27 * (0,5x+0,6) ⇔
3,26 – 2,913 = 0,27 * (0,5x+0,6) - 0,27 * (-0,3x-0,1) ⇔
0,347 = 0,135*x + 0,162 + 0,081x + 0,027 ⇔
0,347 = 0,216*x + 0,189 ⇔
x = 0,7315

2. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 2: ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΜΟΥ Ε & ΜΕ ΠΟΛΛΟΥΣ ΕΜΠΕΙΡΟΓΝΩΜΟΝΕΣ (2006-2007)

Ο οργανισμός τοπικής αυτοδιοίκησης (ΟΤΑ) επαρχιακής πόλης, στην οποία παρατηρείται σημαντική επέκταση του πολεοδομικού ιστού λόγω έντονης εμποροβιομηχανικής και τουριστικής ανάπτυξης, προτίθεται να επιτρέψει την λειτουργία λατομείου σε απόσταση τέτοια που να εξυπηρετείται η αυξημένη ζήτηση σε οικοδομικά υλικά, με μείωση του μεταφορικού κόστους που συνιστά ουσιαστική επιβάρυνση, αφού το πλησιέστερο λατομείο είναι στην περιοχή άλλης πόλης, η οποία απέχει 100 km, περίπου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η περιβαλλοντική διάσταση του προβλήματος είναι σημαντική, το Δημοτικό Συμβούλιο σας αναθέτει την επιλογή του πλέον κατάλληλου τόπου εγκατάστασης της δραστηριότητας αυτής με τη μέθοδο της πολυκριτηριακής ανάλυσης.

(Ι)Να κατατάξετε τους τόπους A_1, A_2, A_3, A_4, οι οποίοι έχουν προκύψει από μια διαδικασία προεπιλογής, βάσει της ιδιοκτησιακής διαθεσιμότητας και της πετρογραφικής σύνθεσης του εδάφους. Τα κριτήρια που έχετε αποφασίσει να χρησιμοποιήσετε είναι:

f_1 Κόστος εξόρυξης, εξαρτώμενο από την χωρική κατανομή της πρώτης ύλης και τη γεωμορφολογία του πεδίου.

f_2 Μεταφορικό κόστος, εξαρτώμενο από την απόσταση, την κατάσταση του δρόμου σε όλη τη διάρκεια του έτους και την προσβασιμότητα στην γειτονία του λατομείου.

f_3 Περιβαλλοντική επιβάρυνση, κυρίως από αιωρούμενα σωματίδια και ηχορύπανση.

f_4 Υποβάθμιση της αισθητικής του τοπίου, με δυσμενή αποτελέσματα στην έλξη τουριστών και τις τιμές των ακινήτων στις πλησιέστερες προς το λατομείο περιοχές της πόλης.

f_5 Αποδοχή από τους κατοίκους, ιδιαίτερα της περιοχής πλησίον του λατομείου.

Ο πολυκριτηριακός πίνακας, τον οποίον έχετε καταρτίσει με την βοήθεια εμπειρογνωμόνων (μηχανικών, οικονομολόγων, κτηματομεσιτών και τουριστικών πρακτόρων), δίνεται ακολούθως.

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 **Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ**
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr **Τηλ:210.93.24.450**

		Μέσες Τιμές Βαθμολογίας Επιλογών α_{ij} Αντίστοιχες Τυπικές Αποκλίσεις e_{ij}								Βαθμολογία Επιλογών Διπλής Στάθμισης			
Κριτήρια	Συντελεστές βαρύτητας	A_1		A_2		A_3		A_4					
f_i	w_i	α_{i1}	e_{i1}	α_{i2}	e_{i2}	α_{i3}	e_{i3}	α_{i4}	e_{i4}				
f_1	**0,31**	3,42	0,55	3,70	0,32	1,84	0,21	1,90	0,31				
f_2	**0,19**	2,68	0,19	2,20	0,48	4,80	0,58	2,90	0,87				
f_3	**0,10**	4,80	0,16	3,50	0,81	3,10	0,29	3,40	0,34				
f_4	**0,29**	3,90	0,43	2,20	0,53	1,80	0,57	4,30	0,56				
f_5	**0,11**	4,80	0,19	4,60	0,22	3,00	0,36	4,70	0,16				
Άθροισμα S_j :													

όπου wi συντελεστής βαρύτητας του κριτηρίου fi

aij βαθμός που έχει τεθεί στον τόπο Aj (μεταξύ των ορίων 1 και 5, για τον καλύτερο και χειρότερο βαθμό της κλίμακας, αντίστοιχα), σύμφωνα με το κριτήριο fi , δηλ. μικρότερος σημαίνει καλύτερος βαθμός

eij τυπική απόκλιση που αντιστοιχεί στο βαθμό aij

(ΙΙ) Να προσδιορίσετε (υπολογιστικά) το ελάχιστο ποσοστό κατά το οποίο πρέπει να μειωθούν (δηλ. να βελτιωθούν) οι βαθμοί του δεύτερου κατά σειρά προτίμησης τόπου, οι οποίοι έχουν τεθεί

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 **Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ**
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr **Τηλ:210.93.24.450**

με βάση τα περιβαλλοντικά κριτήρια f3, f4, f5 (χωρίς μεταβολή των αντίστοιχων τυπικών αποκλίσεων), ώστε ο τόπος αυτός να φθάσει την πρώτη θέση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(I)

		Μέσες Τιμές Βαθμολογίας Επιλογών α_{ij} Αντίστοιχες Τυπικές Αποκλίσεις e_{ij}								Βαθμολογία Επιλογών Διπλής Στάθμισης			
Κριτήρια	Συντελεστές βαρύτητας	A_1		A_2		A_3		A_4		A_1	A_2	A_3	A_4
f_i	w_i	α_{i1}	e_{i1}	α_{i2}	e_{i2}	α_{i3}	e_{i3}	α_{i4}	e_{i4}	$w_i.\alpha_{i1}.e_{i1}$	$w_i.\alpha_{i2}.e_{i2}$	$w_i.\alpha_{i3}.e_{i3}$	$w_i.\alpha_{i4}.e_{i4}$
f_1	**0,31**	3,42	0,55	3,70	0,32	1,84	0,21	1,90	0,31	0,5831	0,3670	0,1198	0,1826
f_2	**0,19**	2,68	0,19	2,20	0,48	4,80	0,58	2,90	0,87	0,0967	0,2006	0,5290	0,4794
f_3	**0,10**	4,80	0,16	3,50	0,81	3,10	0,29	3,40	0,34	0,0768	0,2835	0,0899	0,1156
f_4	**0,29**	3,90	0,43	2,20	0,53	1,80	0,57	4,30	0,56	0,4863	0,3381	0,2975	0,6983
f_5	**0,11**	4,80	0,19	4,60	0,22	3,00	0,36	4,70	0,16	0,1003	0,1113	0,1188	0,0827
S_j :									Άθροισμα	**1,3433**	**1,3006**	**1,1550**	**1,5586**

$S_3 < S_2 < S_1 < S_4$ άρα A_3 η πρώτη κατά σειρά προτίμησης λύση και A_2 η δεύτερη καλύτερη λύση.

(II) Έστω x το ελάχιστο ποσοστό ($0 < x < 1$) κατά το οποίο πρέπει να μειωθούν (δηλ. να βελτιωθούν) οι βαθμοί του δεύτερου κατά σειρά προτίμησης τόπου A2, οι οποίοι έχουν τεθεί με βάση τα περιβαλλοντικά κριτήρια f3, f4, f5 (χωρίς μεταβολή των αντίστοιχων τυπικών αποκλίσεων), ώστε ο τόπος αυτός (A2) να φθάσει την πρώτη θέση, δηλ. τον τόπο A3.

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

Υπολογιστικά: Για να είναι το x ελάχιστο, θα πρέπει

$$S'_2 = S_3$$

ή

$$0,3670 + 0,2006 + 0,10.3,50.(1-x).0,81 + 0.29.2,20.(1-x).0.53 + 0,11.4,60.(1-x).0,22 = 1,1550$$

ή

$$x = 0,1987 \text{ ή } x = 19,87\%.$$

3. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 3: ΧΡΟΝΟΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ (ΤΕΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2006-2007)

Από μια μελέτη που έγινε για την εκτίμηση του χρόνου εξάντλησης των φυσικών αποθεμάτων σιδήρου (υπό μορφή σιδηρομεταλλεύματος) προκύπτει ότι ο χρόνος αυτός είναι 80 έτη, με βάση τις σημερινές τιμές πώλησης και εκθετική αύξηση της ζήτησης με ρυθμό r = 2% year-1, χωρίς όμως να λαμβάνονται υπόψη άλλες παράμετροι, όπως η υποκατάσταση του σιδήρου από πλαστικά και η ανακύκλωση με χρησιμοποίηση μεταχειρισμένων σιδηρούχων προϊόντων (scrap). Από μια άλλη μελέτη προκύπτει ότι 20% της μελλοντικής ετήσιας ζήτησης είναι δυνατόν να καλυφθεί με υποκατάσταση από πλαστικά ενώ 40% της ετήσιας παραγόμενης ποσότητας σιδήρου είναι δυνατόν να προέρχεται από ανακυκλούμενες πρώτες ύλες. Κάτω από τις προϋποθέσεις αυτές, να προσδιορίσετε την ποσοστιαία αύξηση του χρόνου εξάντλησης των φυσικών αποθεμάτων σιδήρου.

Υπόδειξη: Δίδεται ότι $A = (e^{rt_\varepsilon} - 1) \cdot y_0 / r$ και $t_\sigma = A / y_0$

Υπενθυμίζονται οι συμβολισμοί:

A = η ποσότητα των γνωστών αποθεμάτων

y_0 = η παραγωγή στην αρχή της εξεταζόμενης χρονικής περιόδου

t_ε = ο χρόνος εξάντλησης του αποθέματος όταν η ετήσια παραγωγή y αυξάνεται εκθετικά με ρυθμό r.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Σύμφωνα με την ενότητα 1.1. (σελ. 12-16, περιλαμβανομένων των ασκήσεων αυτοαξιολόγησης 1 και 2) του Κεφαλαίου 1 του Γ' Τόμου, αν y0 η ζήτηση στην αρχή της εξεταζόμενης χρονικής περιόδου, τότε:

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

$$A = (e^{rt_\varepsilon} - 1) \cdot y_0 / r \Rightarrow A / yo = (e^{rt_\varepsilon} - 1) / r$$

όπου:

r = ο εκτιμώμενος ρυθμός κατανάλωσης (% year-1 , εκφραζόμενο ως κλάσμα της μονάδας, δηλ. 100%=1, π.χ. r = 2% year-1 = 0,02 year-1)

A = η εκτιμώμενη ποσότητα των φυσικών αποθεμάτων του μεταλλεύματος (π.χ. tn, ανηγμένοι σε καθαρό προϊόν, ώστε αποθέματα, ζήτηση, κατανάλωση, παραγωγή να εκφράζονται με ενιαίο τρόπο)

tε = ο χρόνος εξάντλησης του αποθέματος όταν η ετήσια παραγωγή y αυξάνεται εκθετικά με ρυθμό r.

Δίνονται

tε = 80 years

r = 2% year-1 = 0,02 year-1

άρα

A/y0=197,65

y'0= y0(1-0,20)(1-0,40)=0,48 y0

A/y'0= A/(0,48y0) = (A/y0)/0,48 = 197,65/0,48 =411,77

$$t_\varepsilon' = \frac{1}{r} \ln(r \cdot \frac{A}{y_0'} + 1)$$ ⇨ tε' = 111,15

Ποσοστιαία αύξηση του χρόνου εξάντλησης των φυσικών αποθεμάτων σιδήρου.

(111,15-80) / 80*100=38,9%

4. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 4: ΑΝΑΛΥΣΗ ΝΕΚΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2004-2005)

Σχεδιάζεται η ίδρυση επιχείρησης παραγωγής προφίλ αλουμινίου από την ανακύκλωση προϊόντων αλουμινίου με ετήσια παραγωγική δυναμικότητα 20.000 tn. Το λειτουργικό κόστος επεξεργασίας εκτιμάται σε 100 ευρώ/tn ενώ το κόστος για την συλλογή-μεταφορά-αποθήκευση της πρώτης ύλης εκτιμάται σε 40 ευρώ/tn. Αν στη φάση του σχεδιασμού της επιχείρησης η προϋπολογιζόμενη ετήσια δαπάνη για αποσβέσεις εκτιμάται σε 8.000.000 Ευρώ:

α) Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή ισορροπίας στην αγορά ανακυκλούμενου αλουμινίου ώστε η λειτουργία της επιχείρησης να δίνει καθαρό κέρδος 10% των ακαθάριστων εσόδων.

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

β) Να προσδιορίσετε το ποσοστό κατά το οποίο θα πρέπει να αυξηθεί η τιμή αυτή, ώστε η επίτευξη του οικονομικού στόχου να επιτυγχάνεται χωρίς υπέρβαση του 80% της παραγωγικής δυναμικότητας.

γ) Να μελετήσετε γραφικά την εξάρτηση της ζητούμενης ελάχιστης τιμής ισορροπίας p_{min} (ευρώ/tn) από την παραγόμενη ποσότητα x (tn).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Έσοδα = p.x

Έξοδα = 8.000.000 + 140.x

Κέρδος = 0.10.p.x

Έσοδα – Έξοδα = Κέρδος

άρα

p.x - (8.000.000 + 140.x) = 0.10.p.x

Λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς p

$$p = \frac{8.000.000 + 140 \cdot x}{0,9 \cdot x} \quad \text{ή} \quad p = \frac{8.000.000}{0,9 \cdot x} + \frac{140}{0.9}$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής p λαμβάνεται όταν η παραγωγή x γίνεται μέγιστη, δηλ. συμπίπτει με την παραγωγική δυναμικότητα των 20.000 tn. Επομένως,

$$p_{min} = \frac{8.000.000}{0,9 \cdot x_{max}} + \frac{140}{0,9} \quad \text{ή} \quad p_{min} = \frac{8.000.000}{0,9 \cdot 20.000} + \frac{140}{0,9} = 600 \quad \text{ευρώ/tn}$$

Β) Για να προσδιορίσουμε το ποσοστό κατά το οποίο θα πρέπει να αυξηθεί η τιμή αυτή, ώστε η επίτευξη του οικονομικού στόχου να επιτυγχάνεται χωρίς υπέρβαση του 80% της παραγωγικής δυναμικότητας (βλ. ανάλυση νεκρού σημείου στο Σχήμα 2, της σελ. 68 του Γ΄ Τόμου), ώστε να γίνει το παράδειγμα περισσότερο ρεαλιστικό, θέτουμε xmax = 0,8.20.000 = 16.000, οπότε λαμβάνουμε

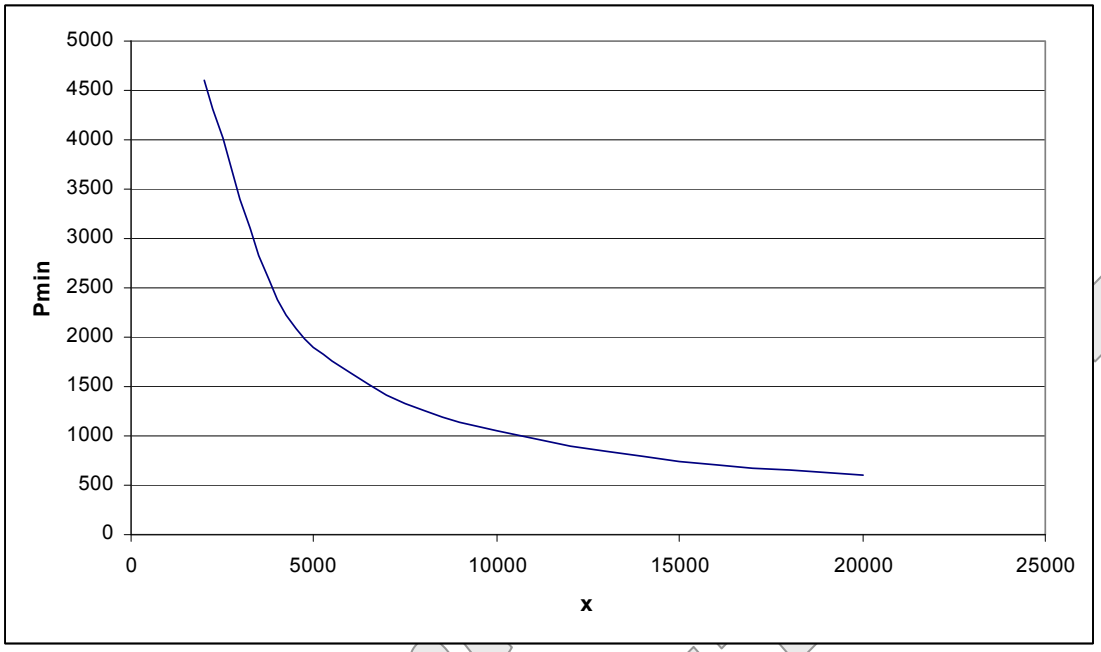
$$p_{min} = \frac{8.000.000}{0,9 \cdot 16.000} + \frac{140}{0,9} = 711,11 \quad \text{ευρώ/tn}$$

Προφανώς το ζητούμενο ποσοστό είναι (711,11-600)/600=0,185 ή 18,5%.

Γ)Από την ακόλουθη γραφική παράσταση, προκύπτει ότι σε χαμηλά επίπεδα παραγωγής x, η αύξηση της ελάχιστης απαιτούμενης τιμής pmin, ώστε να καταστεί η επένδυση συμφέρουσα, είναι

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

εξαιρετικά μεγάλη. Άρα, μόνο σε επίπεδα παραγωγής που πλησιάζουν την δυναμικότητα της εγκατάστασης (π.χ. άνω των 15.000 tn ετησίως) έχουμε επαρκείς εγγυήσεις ότι η επιχείρηση θα εξακολουθήσει να είναι κερδοφόρα σε ένα εξαιρετικά μεταβαλλόμενο περιβάλλον όπως είναι αυτό της προμήθειας ανακυκλώσιμων υλικών (τόσο ως προς τις προσφερόμενες ποσότητες όσο και ως προς τις τιμές και την ποιότητα).



5. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 5: ΚΑΜΠΥΛΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΑΣ (ΤΕΛΙΚΕΣ 2003-2004)

Σε μια νησιωτική κοινότητα έχει καλυφθεί το 25% της αγοράς ηλιακών συλλεκτών κατά τη διάρκεια των 18 πρώτων μηνών (από την εγκατάσταση του πρώτου συλλέκτη) και ένα πρόσθετο ποσοστό (15%) κατά τη διάρκεια των επόμενων 5 μηνών. Να προσδιορίσετε την χρονική περίοδο που απαιτείται (μετά τους 18 + 5 = 23 μήνες), ώστε το ποσοστό κάλυψης της αγοράς να φθάσει το 90% (δηλ. $y/K = 0{,}9$), οπότε η αγορά θα θεωρείται σχεδόν κορεσμένη.

Δίνεται ότι η διάδοση των ηλιακών συλλεκτών υπακούει στη συνήθη σιγμοειδή συνάρτηση $y = K/\left(1 + me^{-bt}\right)$, όπου *y* ο αριθμός των ηλιακών συλλεκτών που είναι εγκατεστημένοι κατά την χρονική στιγμή *t* και *K, m, b* οι παράμετροι κορεσμού, θέσης, ταχύτητας, αντίστοιχα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εφαρμόζουμε το ποσοτικό υπόδειγμα της σιγμοειδούς συνάρτησης για τις χρονικές στιγμές t1 = 18 μήνες και t2 = 18+5 = 23 μήνες, οπότε τα ποσοστά κάλυψης της αγοράς είναι (y/K)1 = 0,25 και (y/K)2 = 0,25 + 0,15 = 0,40, αντιστοίχως:

$$m \cdot e^{-bt_1} = 1/(y/K)_1 - 1 \qquad (1)$$

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

$$m \cdot e^{-bt_2} = 1/(y/K)_2 - 1$$

Διαιρούμε κατά μέλη για την απαλοιφή του m:

$$e^{b(t_2 - t_1)} = \frac{1/(y/K)_1 - 1}{1/(y/K)_2 - 1}$$

Λύνουμε ως προς b:

$$b = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{1/(y/K)_1 - 1}{1/(y/K)_2 - 1}$$

Αντικαθιστούμε με τα δεδομένα και προσδιορίζουμε την τιμή του b:

$$b = \frac{1}{23 - 18} \ln \frac{1/0{,}25 - 1}{1/0{,}40 - 1}$$ ή b = 0,13863

Προσδιορίζουμε την τιμή της παραμέτρου m από την (1):

$$m = [1/(y/K)_1 - 1]e^{bt_1}$$

$$m = [1/0{,}25 - 1]e^{0{,}13863 \cdot 18}$$ ή m = 36,38

Λύνοντας την αρχική συνάρτηση ως προς t, λαμβάνουμε

$$t = \ln\{m/[1/(y/K) - 1]\}/b$$

με αντικατάσταση των τιμών που βρέθηκαν b = 0,13863 και m = 36,38, λαμβάνουμε για y/K = 0,9 (δηλ. 90% κορεσμός της αγοράς):

$$t = \ln\{36{,}38/[1/0{,}9 - 1]\}/0{,}13863$$

ή t = 41,8 μήνες.

6. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 6: ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΧΟΡΗΓΗΣΗΣ (ΕΡΓΑΣΙΑ 2008-2009)

Επειδή οι περισσότεροι βιοτέχνες –ιδιώτες δείχνουν απρόθυμοι να επενδύσουν στις προτεινόμενες βελτιώσεις, ώστε να διατηρείται η περιβαλλοντική ρύπανση στο επίπεδο του οικονομικά άριστου, οι δημόσιες αρχές σχεδιάζουν ένα σύστημα επιχορηγήσεων για να αυξηθούν οι ωφέλειες των ιδιωτών, δια μέσου μείωσης του κόστους των επενδύσεών τους. Με αυτό το μέτρο, οι δημόσιες αρχές επιδιώκουν να ενθαρρύνουν την πραγματοποίηση επενδύσεων των ιδιωτών ύψους 6.000 χιλ. κατά το πρώτο έτος εφαρμογής. Αφού αποφασίσθηκε να γίνει η επιχορήγηση, οι Αρχές αναζητούν τη μέγιστη επιχορήγηση (%) που πρέπει να καταβληθεί, ώστε τα διαφεύγοντα έσοδα του δημοσίου να είναι λιγότερα από την αύξηση της συνολικής περιβαλλοντικής ευημερίας

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

(βελτιστοποίηση) σε χρονικό ορίζοντα πέντε ετών από την ολοκλήρωση των επενδύσεων του πρώτου έτους η οποία, από σχετική έρευνα, εκτιμήθηκε σε 3.500 χιλ. ευρώ (για τα πέντε έτη). Θεωρώντας ότι υπάρχει ένα επί πλέον κόστος για το δημόσιο σύστημα διαχείρισης των επιχορηγήσεων 20% στο τέλος της περιόδου, εκτιμείστε (τ. Γ, σελ. 73-74) το μέγιστο ποσοστό επιχορήγησης επί της αρχικής επένδυσης που πρέπει να καταβάλουν οι δημόσιες αρχές (χάριν απλοποίησης, αδιαφορούμε για κάθε άλλη επιβάρυνση ή ωφέλεια). Θεωρείστε ότι r=5% και t=5.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

G=αναμενόμενη ωφέλεια από τη μείωση της ρύπανσης στη λίμνη επί πέντε έτη (3.500 ευρώ).

S = συνολικό ποσό αρχικής επένδυσης

D=διαφεύγοντα έσοδα δημοσίου με την επιχορήγηση, χωρίς το κόστος διαχείρισης των επιχορηγήσεων.

DI= συνολικά διαφεύγοντα έσοδα δημοσίου με την επιχορήγηση, συνεκτιμώντας το κόστος διαχείρισης των επιχορηγήσεων (C), δηλαδή DI =D + C.

Η μέγιστη επιχορήγηση καθορίζεται έτσι ώστε η συνολική ωφέλεια (συνολική ευημερία) να μη μειώνεται. Αυτό θα συμβαίνει όταν τα συνολικά διαφεύγοντα έσοδα του δημοσίου από την επιχορήγηση μαζί με το κόστος διαχείρισης της επιχορήγησης, δεν ξεπερνούν την αύξηση της συνολικής αναμενόμενης ωφέλειας από την προστασία του περιβάλλοντος.

Άρα πρέπει DI≤G

Χάριν ευκολίας, παίρνουμε DI =G=3.500 χιλ. ευρώ

Επειδή DI= D +C και C=0,20*D (η δαπάνη του συστήματος διαχείρισης των επιχορηγήσεων είναι το 20% της επιχορήγησης), άρα DI= 1,2D και D= DI/1,2 (με βάση την εκφώνηση, δεν προσμετράται άλλη επιβάρυνση ή ωφέλεια).

DI=SI$(1+r)^t$ + C (δηλαδή συνολικά διαφεύγοντα έσοδα = δαπανώμενο ποσό με την επιχορήγηση επί 5 έτη + κόστος διαχείρισης)

D+C= SI$(1+r)^t$ + C D= SI$(1+r)^t$

2.916,67=6000*I*1,055 και I=38,09%

7. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 7: ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ (ΤΕΛΙΚΕΣ 2005-2006)

Δίνεται η συνάρτηση κοινωνικοοικονομικού κόστους $\mathrm{KK} = \alpha_1 C^2 + \beta_1 C + \gamma_1$ και η συνάρτηση ιδιωτικοοικονομικού κόστους $\mathrm{IK} = \alpha_2 C^2 + \beta_2 C + \gamma_2$, όπου *C* η συγκέντρωση του ρυπαντή (σε mg/m^3), αντιπροσωπευτική της αέριας ρύπανσης σε μια κοινότητα με περιβαλλοντική επιβάρυνση, λόγω λειτουργίας βιομηχανικής μονάδας στην περιοχή της. Οι τιμές των παραμέτρων είναι α_1 =

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

0,01, β_1 = -0,3, γ_1 = 4, α_2 = 0,01, β_2 = -1, γ_2 = 30. Να προσδιορίσετε υπολογιστικά το ελάχιστο περιβαλλοντικό κόστος *ΠΚ* = *ΚΚ* + *ΙΚ* και τη βέλτιστη τιμή C_{opt} στις παρακάτω δυο περιπτώσεις: (i) Χωρίς οποιαδήποτε μεταβολή στις τιμές των παραμέτρων. (ii) Όταν η τιμή της παραμέτρου α_1 αυξάνεται κατά 50%, λόγω αναθεώρησης των απόψεων των εμπειρογνωμόνων για την επικινδυνότητα ορισμένων ρύπων (που οδηγούν και σε αυστηρότερα περιβαλλοντικά πρότυπα). Δεν απαιτείται κατασκευή / σχεδίαση των αντίστοιχων πινάκων ή διαγραμμάτων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Συνάρτηση κοινωνικοοικονομικού κόστους $\mathrm{KK} = \alpha_1 C^2 + \beta_1 C + \gamma_1$

συνάρτηση ιδιωτικοοικονομικού κόστους $\mathrm{IK} = \alpha_2 C^2 + \beta_2 C + \gamma_2$

όπου *C* η συγκέντρωση του ρυπαντή (σε mg/m^3)

α_1 = 0,01, β_1 = -0,3, γ_1 = 4

α_2 = 0,01, β_2 = -1, γ_2 = 30

περιβαλλοντικό κόστος *ΠΚ* = *ΚΚ* + *ΙΚ*

Συνάρτηση οριακού κοινωνικοοικονομικού κόστους $O\mathrm{KK} = \dfrac{d(KK)}{dC} = 2\alpha_1 C + \beta_1$

Συνάρτηση οριακού ιδιωτικοοικονομικού κόστους $O\mathrm{IK} = \dfrac{d(IK)}{dC} = 2\alpha_2 C + \beta_2$

Βέλτιστη τιμή Copt για OKK = -OIK

Άρα $$C_{opt} = \frac{-(\beta_1 + \beta_2)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Δεν απαιτείται κατασκευή / σχεδίαση των παρακάτω πινάκων ή διαγραμμάτων:

C	ΚΚ	ΙΚ	ΠΚ
10	2,0	21,0	23,0
20	2,0	14,0	16,0
30	4,0	9,0	13,0
40	8,0	6,0	14,0
50	14,0	5,0	19,0

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

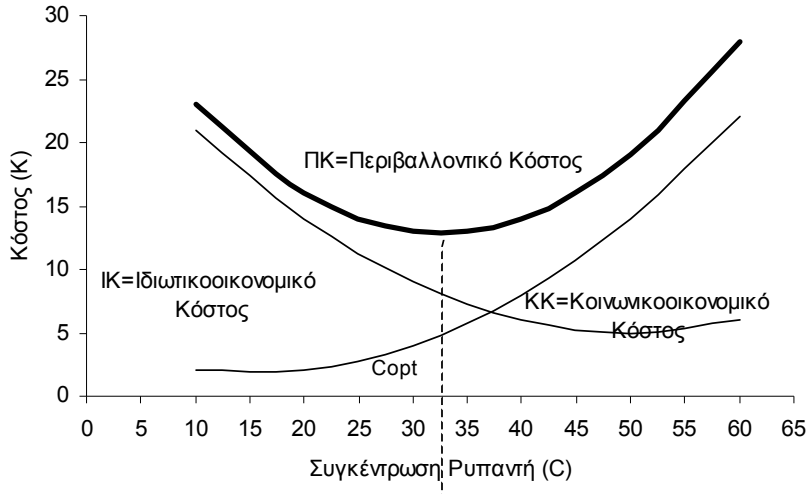
C	KK	IK	ΠΚ
60	22,0	6,0	28,0

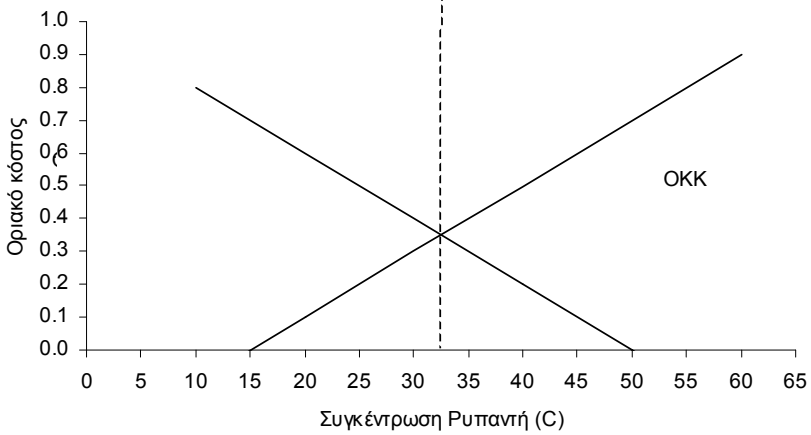
βέλτιστη τιμή Copt

C_{opt}	**32,50**	mg/m^3	
C	KK	IK	**ΠΚ ελάχιστο**
32,50	4,8	8,1	**12,9**

C	OKK	OIK
10	-0,10	0,80
20	0,10	0,60
30	0,30	0,40
40	0,50	0,20
50	0,70	0,00
60	0,90	-0,20

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450





. α_1= (1+0,50).0,01 = 0,015

C	ΚΚ	ΙΚ	ΠΚ
10	2,5	21,0	23,5
20	4,0	14,0	18,0
30	8,5	9,0	17,5
40	16,0	6,0	22,0
50	26,5	5,0	31,5
60	40,0	6,0	46,0

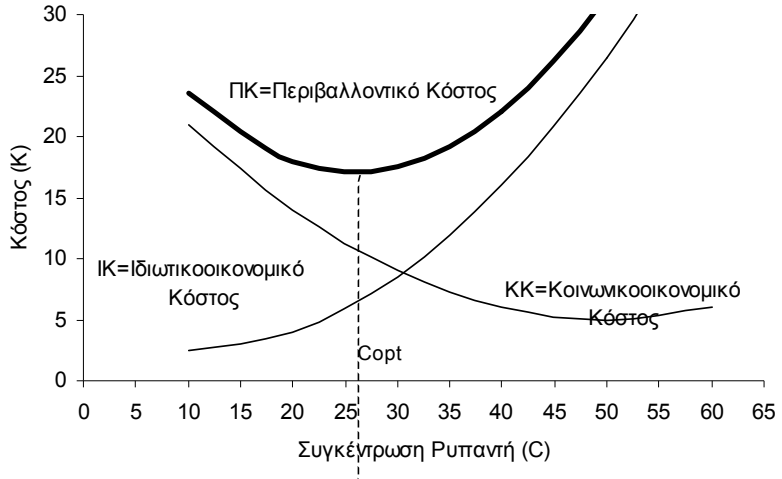
ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

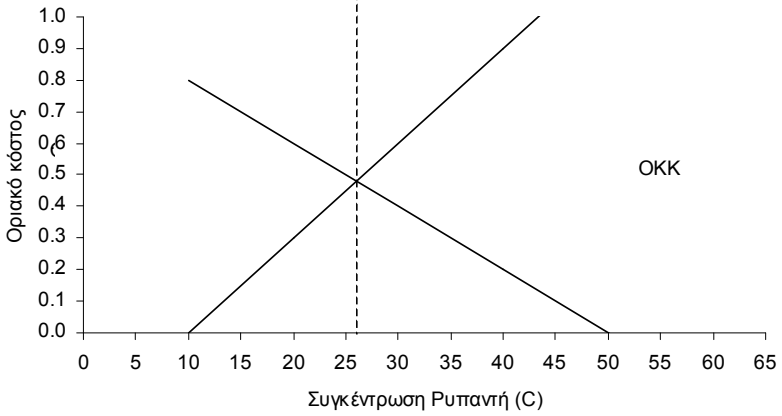
βέλτιστη τιμή Copt

C_{opt}	**26,00**	mg/m^3	
C	KK	IK	**ΠΚ ελάχιστο**
26,00	6,3	10,8	**17,1**

C	OKK	OIK
10	0,00	0,80
20	0,30	0,60
30	0,60	0,40
40	0,90	0,20
50	1,20	0,00
60	1,50	-0,20

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450





8. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 8: BOD (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2003-2004)

Σε μια νησιωτική κοινότητα με πληθυσμό 1500 κατοίκων, η συνολική ημερήσια κατανάλωση νερού είναι 450 m^3 από τα οποία το 70% καταλήγει στην αποχέτευση. Αν η μέση τιμή του παραγόμενου BOD – μάζας ανά κάτοικο είναι 80 g και η κοινότητα διαθέτει μόνο πρωτοβάθμιο βιολογικό καθαρισμό που μειώνει το BOD κατά 40%, να προσδιορίσετε την ελάχιστη απόδοση που απαιτείται να έχει μελετώμενος δευτεροβάθμιος βιολογικός καθαρισμός, ώστε τα επεξεργασμένα απόβλητα που διατίθενται στη συνέχεια για άρδευση να μην έχουν BOD μεγαλύτερο από 15 mg/L, σύμφωνα με τα αντίστοιχα διεθνή περιβαλλοντικά πρότυπα (environmental standards).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

BOD πριν τον πρωτοβάθμιο βιολογικό καθαρισμό: (1500 κατ.).(80000 mg/κατ.)/[(0,70).(450000)] = 381 mg/L.

BOD μετά τον πρωτοβάθμιο βιολογικό καθαρισμό: (0,60).(381) = 228,6 mg/L.

Απαιτούμενη απόδοση δευτεροβάθμιου βιολογικού καθαρισμού σύμφωνα με τα περιβαλλοντικά πρότυπα (standards): (228,6-15)/228,6 = 0,934 ή 93,4%.

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

9. ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 9: ΠΑΡΟΧΗ ΑΠΟΒΛΗΤΩΝ (ΕΡΓΑΣΙΑ 2009-2010)

Θεωρήστε το ποτάμι του παρακάτω σχήματος. Στα σημεία Α και Β υπάρχουν δύο βιομηχανίες που αποβάλουν τα ημιεπεξεργασμένα υγρά απόβλητά τους στο ποτάμι σύμφωνα με τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα. Τα σημεία Α και Β απέχουν μεταξύ τους 250 μέτρα, ενώ το σημείο Γ απέχει 1500 μέτρα από το Β.

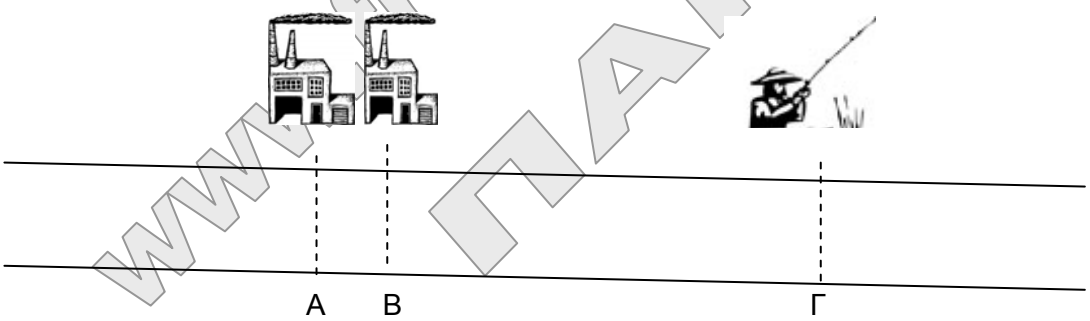
Το σημείο Γ αποτελεί τοποθεσία στην οποία δραστηριοποιούνται επαγγελματίες ψαράδες οι οποίοι έχουν διαμαρτυρηθεί στο τοπικό Δήμο ότι η περιοχή είναι υπερβολικά μολυσμένη με συνέπεια να μην μπορούν να πιάσουν ψάρια.

Ο Δήμος της περιοχής ανέθεσε το θέμα σε ειδικό περιβαλλοντολόγο να ερευνήσει το θέμα και να παραδώσει τεκμηριωμένη εισήγηση στο Δημοτικό Συμβούλιο.

Δίνονται τα ακόλουθα δεδομένα :

- η σταθερά μείωσης του BOD είναι $k=0,2\ h^{-1}$
- Η ταχύτητα ροής του ποταμού είναι u=500m/h και παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος του ποταμού

Τα ψάρια αποφεύγουν νερά με συγκέντρωση BOD μεγαλύτερη από 20 mg/L. Το ζητούμενο από τη συγκεκριμένη μελέτη είναι να βρεθεί αν η μόλυνση στο σημείο Γ είναι μεγαλύτερη των 20 mg/L και επομένως αν έχουν δίκιο οι ψαράδες οι οποίοι διαμαρτύρονται για τα ψάρια που έχουν εξαφανιστεί.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Συγκέντρωση BOD πριν το εργοστάσιο Α.

Πριν από το σημείο Α δεν υπάρχει περιβαλλοντική επιβάρυνση σύμφωνα με την εκφώνηση. Οποιαδήποτε επιβάρυνση στο σημείο Α του ποταμού έχει επιδράσεις κατάντη του σημείου αυτού.

ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΑΠ ΔΕΟ 42 Ν. ΠΑΝΤΕΛΗ
www.frontistiria-eap.gr
e-mail: frontistiria_eap@yahoo.gr Τηλ:210.93.24.450

Επομένως πριν από το σημείο Α η συγκέντρωση του BOD είναι η συγκέντρωση του ποταμού δηλαδή 8 mg/L.

2. Συγκέντρωση BOD αμέσως μετά το εργοστάσιο Α

Εφαρμόζοντας το ισοζύγιο μάζας στο σημείο Α προκύπτει

$S_{\pi}Q_{\pi} + S_A Q_A = S_{\pi A}(Q_{\pi} + Q_A)$ ή $1700 \times 8 + 200 \times 300 = S_{\pi A}(1700 + 300)$ ή $S_{\pi A} = 36{,}8$ mg/L

3. Συγκέντρωση BOD στο μετά το εργοστάσιο Β

Από το σημείο Α στο Β τα υγρά χρειάζονται t=l/u=250/500=0.5 h

Το ποτάμι έχει μια δυνατότητα "αυτοκαθαρισμού", η συγκέντρωση του BOD πριν το σημείο Β μπορεί να εκτιμηθεί από τη σχέση $S_B = S_{\pi A} e^{-kt}$ ή

$S_B = 36{,}8 e^{-0.2 \times 0.5} = 33{,}3$ mg/L

Εφαρμόζοντας το ισοζύγιο μάζας στο σημείο Β προκύπτει ότι η συγκέντρωση μετά το σημείο Β

$S_{\pi'} Q_{\pi A} + S_B Q_B = S_{\pi B}(Q_{\pi A} + Q_B)$ ή $2000 \times 33{,}3 + 150 \times 100 = S_{\pi B}(2000 + 100)$ ή $S_{\pi B} = 38.86$ mg/L

Από το σημείο Β στο Γ τα υγρά χρειάζονται t=1500/500=3 h

Η συγκέντρωση του BOD στο σημείο Γ θα είναι $S_{\Gamma} = S_{\pi B} e^{-kt}$ ή

$S_{\Gamma} = 38{,}86 e^{-0.2 \times 3} = 21.32$ mg/L